Electiva 188 - Introducción a Octave
Trabajo Práctico 3

Daniel Millán
Nora Moyano & Iván Ferrari

Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
San Rafael 5600, Argentina
Mayo de 2018

Realice preguntas y no tenga miedo de experimentar (como simple usuario no debería poder realizar demasiados ***estragos***).

Ejercicio 1.
Describa el funcionamiento de las siguientes órdenes:

```
>> ezplot('sin(x^2)*x/2')
>> ezplot('sin(x^2)*x/2',[-2*pi,2*pi])
>> ezplot('log(x)')
>> ezplot('log(x)', [0,2*pi])
>> ezplot('sqrt(1-x^2)',[-1,1])
>> ezplot('sqrt(1-x^2)',[-1,1]), axis([-2,2,-1,2]), title('Figura prueba'),
   xlabel('Eje de las x'),  ylabel('Eje de las y')
```

Ejercicio 2.
La distancia en $\mathbb{R}^3$ entre un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y un plano dado por $ax + by + cz + d = 0$, es $d_P = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, suponiendo que a, b y c no son todos cero.

Determine la distancia entre P_0 y un plano en los siguientes casos.

1. Sea $P_0 = (0.5, 0.5, 0.5)$ y el plano $x + y + z = \sqrt{3}$.

2. Sea $P_0 = (0.5, 0.5, 0.5)$ y el plano $x + y + cz = 0$, donde $c \in \mathbb{R}$ que se encuentran en el intervalo $[0, Inf)$. Realice un gráfico de $d_P(c)$, determine el valor de c para el cual se obtiene la máxima y mínima distancia. Explique a que situación corresponden esos casos.

Ejercicio 3.
Se requiere analizar el movimiento de una partícula que tiene una trayectoria helicoidal en 3D. La posición de la partícula en el espacio, $\boldsymbol{r}(t)$, se encuentra parametrizada en función del tiempo como $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde:

$$x(t) = \frac{t}{2}\cos(t), \quad y(t) = \frac{t}{2}\sin(t), \quad z(t) = t.$$

1. Grafique el movimiento de la partícula en 3D en el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 3π. Para ello utilice $N = 100, 1000, 10000$ intervalos de tiempo equiespaciados $[t_i, t_{i+1}],\ i = 1, 2, \ldots, N-1$. ¿Qué observa?

2. Aproxime la longitud de la curva que realiza la trayectoria de la partícula. Para ello puede sumar las distancias entre las posiciones consecutivas de la partícula a instantes de tiempo t_i y t_{i+1}.

Ejercicio 4. 3D sombrero plot de Octave.

1. Genere el bien conocido “sombrero” plot de Octave. Puede ser de utilidad la siguiente dirección web:

   `https://octave.org/doc/v4.2.0/Three_002dDimensional-Plots.html`

Análisis de un sistema idealizado masa-resorte

En este problema se analiza y desarrolla un ejemplo propuesto en el Capítulo 12: Estudio de casos: ecuaciones algebraicas lineales.

– Steven C. Chapra y Raymond P. Canale, “Métodos numéricos para ingenieros”, McGraw-Hill, 5ta Edición, 2007.

Antecedentes

En la Figura 1 se presenta un sistema idealizado masa-resorte. Después de liberar las masas, éstas son jaladas hacia abajo por la fuerza de gravedad. Observe que el desplazamiento resultante en cada resorte de la Figura 1*b* se mide a lo largo de las coordenadas locales referidas a su posición inicial en la Figura 1*a*.

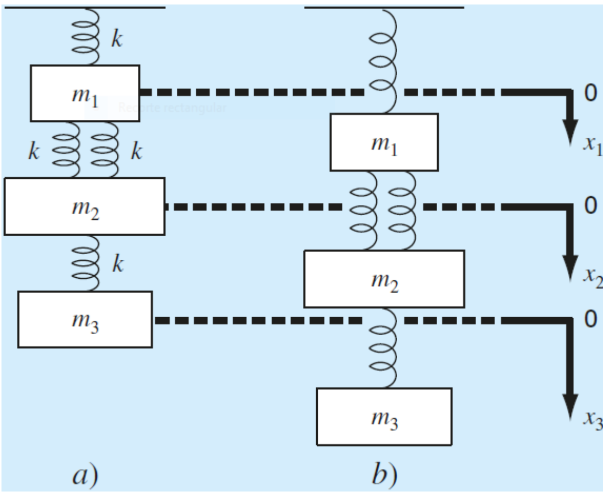

Figura 1: Un sistema compuesto de tres masas suspendidas verticalmente por una serie de resortes. *a*) El sistema antes de ser liberado, es decir, antes de la extensión o compresión de los resortes. *b*) El sistema después de ser liberado. Observe que las posiciones de las masas están en referencia a las coordenadas locales con orígenes en su posición antes de ser liberadas.

Para desarrollar un modelo matemático del sistema podemos emplear la segunda ley de Newton en conjunto con el equilibrio de fuerzas. Para cada masa, la segunda ley de Newton se expresa como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_D - F_U \tag{1}$$

Para simplificar el análisis se supondrá que todos los resortes son idénticos y que se comportan de acuerdo con la ley de Hooke. Para la primera masa (Figura 2*a*), la fuerza hacia arriba

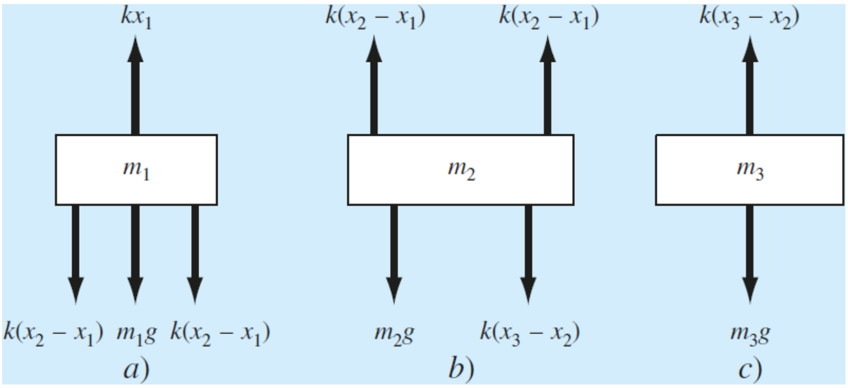

Figura 2: Diagramas de cuerpo libre para las tres masas de la Figura 1.

es únicamente una expresión directa de la ley de Hooke:

$$F_U = kx_1 \tag{2}$$

Las componentes hacia abajo consisten en las dos fuerzas del resorte junto con la acción de la gravedad sobre la masa,

$$F_D = k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_1) + m_1 g \tag{3}$$

Observe cómo la componente de fuerza de los dos resortes es proporcional al desplazamiento de la segunda masa, x_2, corregida por el desplazamiento de la primera masa, x_1.

Las ecuaciones (2) y (3) se sustituyen en la ecuación (1) para dar

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2k(x_2 - x_1) + m_1 g - kx_1 \tag{4}$$

Al desarrollar los diagramas de cuerpo libre para la segunda y tercera masa (Figura 2b y c) se obtienen

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) + m_2 g - 2k(x_2 - x_1) \tag{5}$$

y

$$m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} = m_3 g - k(x_3 - x_2) \tag{6}$$

Las ecuaciones (4), (5) y (6) forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas. Con las condiciones iniciales apropiadas, estas ecuaciones sirven para calcular los desplazamientos de las masas como una función del tiempo (es decir, sus oscilaciones). También, podemos obtener los desplazamientos que ocurren cuando el sistema eventualmente llega al reposo, es decir, al estado estacionario. Para esto se igualan a cero las derivadas en las ecuaciones (4), (5) y (6), obteniéndose

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3kx_1 & - & 2kx_2 & + & 0x_3 & = & m_1 g \\ -2kx_1 & + & 3kx_2 & - & kx_3 & = & m_2 g \\ 0x_1 & - & kx_2 & + & kx_3 & = & m_3 g \end{array}$$

o, en forma matricial,

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$$

donde $\boldsymbol{K}$, conocida como matriz de rigidez, es

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3k & -2k & 0 \\ -2k & 3k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix},$$

mientras que $\boldsymbol{w}$ es el vector de carga.

Si $m_1 = 2kg$, $m_2 = 3kg$, $m_3 = 2.5kg$, y todas las $k = 10kg/s^2$, generar la inversa de $[K]$ y obtener los desplazamientos de las masas.

Solución

Sustituyendo los parámetros del modelo se obtiene

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 30 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 19.6 \\ 29.4 \\ 24.5 \end{bmatrix}.$$

La inversa de la matriz de rigidez calculada es

$$\boldsymbol{K}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.15 & 0.15 \\ 0.1 & 0.15 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular el vector de desplazamientos como

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 7.350 \\ 10.045 \\ 12.495 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 5.

1. Lleve a cabo el mismo cálculo, pero agregue un tercer resorte entre las masas 1 y 2, y triplique el valor de k para todos los resortes.
2. Realice el mismo cálculo del sistema original, pero considere que la masa 2 puede tomar cualquier valor entre 1 y 5 kg. Grafique los valores de x_1, x_2 y x_3 en función de m_2. La figura debe tener título y los ejes horizontal y vertical nombre, además cada curva x_i debe ser fácilmente reconocible (defina "legend").

Entrega obligatoria: Ejercicios 2 y 5.

Se podrá presentar una guía de problemas en grupos de a lo sumo 2 integrantes. Los TPs se deben presentar en pdf via email a dmillan@fcai.uncu.edu.ar y deben constar de una cabecera con:

a) número y nombre de la electiva y responsables

b) número de TP que se entrega

c) nombre de los integrantes

d) carrera a la que pertenecen

e) email de contacto

f) número de legajo

Nota: el TPs debe ser conciso y responder de forma breve pero clara lo que se pide.