Electiva 188 - Introducción a Octave
Trabajo Práctico 4

Daniel Millán

Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
San Rafael 5600, Argentina
Marzo–Abril de 2019

Ejercicio 1. Escalas de temperatura.

Las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) se relacionan a través de una ecuación lineal. Sabiendo que el punto de congelación del agua es a $0°C$ o a $32°F$, y que el punto de ebullición se alcanza a $100°C$ o a $212°F$, se pide:

1. Halla la relación lineal entre ambas escalas.
2. Representa la función cuya expresión has hallado en el apartado anterior usando vectores y el comando `plot`.
3. ¿Existe alguna temperatura en la cual un termómetro en grados Celsius proporcione la misma lectura que un termómetro en grados Fahrenheit?

   Para responder a esta pregunta puedes derivar las expresiones y verificar mediante la interpretación gráfica de la situación.

Ejercicio 2. Invariantes del tensor de esfuerzos.

En mecánica de medios continuos el tensor tensión de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, también llamado tensor de tensiones o tensor de esfuerzos, es el tensor que da cuenta de la distribución de tensiones y esfuerzos internos en el medio continuo.

La forma general para un campo tensorial de tensiones en tres dimensiones está dado como (en MPa):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix},$$

en la que los términos en la diagonal principal representan esfuerzos a la tensión o a la compresión, y los términos fuera de la diagonal representan los esfuerzos cortantes.

En un sistema de referencia cuyos ejes coordenados son las direcciones principales, la matriz de tensiones que representa al tensor de tensiones en tal sistema de coordenadas es diagonal y tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

En las direcciones o ejes principales, no hay tensiones tangenciales o cortantes.

El problema de determinar las tensiones principales y las direcciones principales se reduce a un problema de autovalores

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma n} &= \lambda \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

en el que las incógnitas son las componentes n_1, n_2 y n_3 de la dirección principal y el valor λ es la tensión principal. Para obtener una solución no trivial (distinta de cero), el determinante de la matriz $\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I}$ debe ser igual a cero, es decir, el sistema es singular. Expandiendo el determinante se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}\end{aligned}$$

I_1, I_2 y I_3 se conocen como los invariantes de esfuerzos, se llaman así porque estos valores no cambian aunque cambie el sistema de referencia. Mientras que los valores de λ que hacen cero el polinomio característico, las raíces, son los valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

Se tiene un campo tensorial (en MPa) dado por la matriz que sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 \\ 14 & 7 & 15 \\ 25 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Mediante el empleo de un *script* resuelva los siguiente ítems en Octave:

1. Determine los invariantes de tensiones o esfuerzos I_1, I_2 e I_3.
2. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 mediante la función `eig`.
3. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 por medio de una técnica de localización de raíces.

Ejercicio 3. Isotermas.

Se conoce como ecuación de Van der Waals para n moles de un gas a:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

donde P es la presión del fluido, medido en atmósferas, V es el volumen (en litros), T es la temperatura en grados Kelvin y R (atm.l/mol.K) es la constante universal de los gases. Los valores de a y b son característicos de cada gas.

Se llaman isotermas las curvas que se obtienen al representar la ecuación de Van der Waals para una temperatura fija. Consideremos un gas que verifica la ecuación:

$$\left(P + \frac{3}{V^2}\right)(3V - 1) = 8T$$

1. Escribe un *script* que represente una gráfica con las isotermas de ese gas (P en función de V), para distintos valores de T : 0.5, 0.7, 0.9, 1.1 y 1.3. Deberás ajustar los valores de los ejes para tener una visión aceptable de todas ellas.

2. Además, cada curva debe ir con un trazo diferenciado, con el texto que indique la isoterma que se ha representado, así como el título de la gráfica y la etiqueta de los ejes. Escoge una presión constante de valor α. Dibuja la recta $p = \alpha$ conjuntamente con las isotermas. ¿Hay algún volumen a esa presión? ¿Hay más de uno? Razona la respuesta.

Ejercicio 4. Ecuación cartesiana de la catenaria*.

Un cable de una línea de transmisión de energía eléctrica, cuyos anclajes están a la misma altura tiene una cuerda de $L = 240$ [m]. El cable pesa $w = 83$ [N/m] y la flecha en su punto medio es de $y(0) = 60$ [m]. La ecuación cartesiana de la catenaria se expresa de la siguiente forma:

$$y(x) = \frac{T_0}{w}\left(\cosh\left(\frac{wx}{T_0}\right) - 1\right),$$

donde x es la distancia en el eje horizontal, la cual se relaciona con la longitud de arco, s, mediante la expresión

$$s = \frac{T_0}{w}\sinh\frac{wx}{T_0}.$$

siendo s medida desde el punto medio, $-L/2 \leq s \leq L/2$.

1. Determine la tensión del cable en el punto medio, T_0. Para ello puede emplearse la ecuación de la curva catenaria, que representa la forma que adopta el cable bajo la acción exclusiva de su peso.

   Ayuda: emplee una secuencia de órdenes del tipo `T_o = fzero(fun,T_0)`, donde `T_0` es un valor semilla "cercano", empleado para resolver el problema nolineal de determinar el valor de `T_o`.

2. Realice una gráfica en la que se muestra la curva de la catenaria para el problema bajo estudio, determine rango de x, indique nombre de los ejes con unidades, características relevantes como el punto mínimo, etc.

Entrega obligatoria de los *scripts* utilizados para resolver al menos dos de los Ejercicios (a libre elección).

Se podrá presentar una guía de problemas en grupos de a lo sumo 2 integrantes. Los TPs se deben presentar en pdf vía email a dmillan@fcai.uncu.edu.ar.

*http://www.elrincondelingeniero.com/cables-catenaria-y-otros/