Introducción a Octave
Trabajo Práctico 3

Daniel Millán, Nicolás Muzi, Eduardo Rodríguez

CONICET
&
Facultad de Ciencias Aplicadas a la Industria, UNCuyo
San Rafael 5600, Argentina
Abril–Mayo de 2020

Realice preguntas y no tenga miedo de experimentar (como simple usuario no debería poder realizar demasiados ***estragos***).

Ejercicio 1. Escalas de temperatura.

Las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) se relacionan a través de una ecuación lineal. Se sabe que el punto de congelación del agua es $0°C$ o $32°F$, y que el punto de ebullición se alcanza a $100°C$ o a $212°F$, se pide:

1. Hallar la relación lineal entre ambas escalas.
2. Representar la función cuya expresión ha hallado en el apartado anterior usando vectores y el comando `plot`.
3. ¿Existe alguna temperatura en la cual un termómetro en grados Celsius proporcione la misma lectura que un termómetro en grados Fahrenheit?

   Para responder a esta pregunta puedes derivar las expresiones y verificar mediante la interpretación gráfica de la situación.

Ejercicio 2. Invariantes del tensor de esfuerzos.

En mecánica de medios continuos el tensor tensión de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, también llamado tensor de tensiones o tensor de esfuerzos, es el tensor que da cuenta de la distribución de tensiones y esfuerzos internos en el medio continuo.

La forma general para un campo tensorial de tensiones en tres dimensiones está dado como (en MPa):

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix},$$

en la que los términos en la diagonal principal representan esfuerzos a la tensión o a la compresión, y los términos fuera de la diagonal representan los esfuerzos cortantes.

En un sistema de referencia cuyos ejes coordenados son las direcciones principales, la matriz de tensiones que representa al tensor de tensiones en tal sistema de coordenadas es diagonal y tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

En las direcciones o ejes principales, no hay tensiones tangenciales o cortantes.

El problema de determinar las tensiones principales y las direcciones principales se reduce a un problema de autovalores

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma n} &= \lambda \boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0} \\
(\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I})\, \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

en el que las incógnitas son las componentes n_1, n_2 y n_3 de la dirección principal y el valor λ es la tensión principal. Para obtener una solución no trivial (distinta de cero), el determinante de la matriz $\boldsymbol{\sigma n} - \lambda \boldsymbol{I}$ debe ser igual a cero, es decir, el sistema es singular. Expandiendo el determinante se obtiene la ecuación característica

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\
I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\
I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2 + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz}
\end{aligned}$$

I_1, I_2 y I_3 se conocen como los invariantes de esfuerzos, se llaman así porque estos valores no cambian aunque cambie el sistema de referencia. Mientras que los valores de λ que hacen cero el polinomio característico, las raíces, son los valores de las tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3.

Se tiene un campo tensorial (en MPa) dado por la matriz que sigue:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 25 \\ 14 & 7 & 15 \\ 25 & 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Mediante el empleo de un *script* resuelva los siguiente ítems en Octave:

1. Determine los invariantes de tensiones o esfuerzos I_1, I_2 e I_3.
2. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 mediante la función `eig`.
3. Encuentre los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 por medio de una técnica de localización de raíces.

Ejercicio 3.

Dado el siguiente polinomio $p(x) = x^5 - 4x^3 + x - 1$, se pide

1. Realizar el gráfico de la figura en el intervalo [-2,2] empleando `ezplot`. Observando la figura aproxime los valores de las raíces.
2. Utilize la función `roots` para determinar las raíces del polinomio. Los valores obtenidos concuerdan con su estimación del punto anterior.
3. Utilize la función `fzero` para determinar las raíces. ¿Encuentra alguna diferencia? Discuta.

Ejercicio 4.

Ud ha realizado un experimento de forma meticulosa y ha obtenido los siguientes valores:

x	6	7	11	15	17	21	23	29	37	39
y	29	21	14	21	15	7	7	13	0	3

1. Utilice regresión por mínimos cuadrados para ajustar una línea recta a las mediciones obtenidas, determine la pendiente y ordenada al origen del ajuste lineal. Calcule el error estándar de la estimación y el coeficiente de correlación. Haga una gráfica de los datos y la línea de regresión.

2. Otra persona realiza una medición adicional de $x = 10$, $y = 10$. Usted en base al modelo obtenido, una evaluación visual de la ubicación de la nueva medición en la gráfica y el error estándar de éste, considera ¿qué la medición es válida o inválida? Justifique su conclusión.

Ejercicio 5. Se requiere analizar el movimiento de una partícula que tiene una trayectoria helicoidal en 3D. La posición de la partícula en el espacio, $\boldsymbol{r}(t)$, se encuentra parametrizada en función del tiempo como $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde:

$$x(t) = \frac{t}{2}\cos(t), \quad y(t) = \frac{t}{2}\sin(t), \quad z(t) = t.$$

1. Grafique el movimiento de la partícula en 3D en el intervalo de tiempo comprendido entre 0 y 3π. Para ello utilice $N = 100, 1000, 10000$ intervalos de tiempo equiespaciados $[t_i, t_{i+1}],\ i = 1, 2, \ldots, N-1$. ¿Qué observa?

2. Aproxime la longitud de la curva que realiza la trayectoria de la partícula. Para ello puede sumar las distancias entre las posiciones consecutivas de la partícula a instantes de tiempo t_i y t_{i+1}.

Ejercicio 6. Se conoce como ecuación de Van der Waals para n moles de un gas a:

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT,$$

donde P es la presión del fluido, medido en atmósferas, V es el volumen (en litros), T es la temperatura en grados Kelvin y R (atm.l/mol.K) es la constante universal de los gases. Los valores de a y b son característicos de cada gas.

Se llaman isotermas las curvas que se obtienen al representar la ecuación de Van der Waals para una temperatura fija. Consideremos un gas que verifica la ecuación:

$$\left(P + \frac{3}{V^2}\right)(3V - 1) = 8T.$$

1. Escribe un *script* que represente una gráfica con las isotermas de ese gas (P en función de V), para distintos valores de T : 0.5, 0.9, y 1.3. Deberás ajustar los valores de los ejes para tener una visión aceptable de todas ellas.

2. Además, cada curva debe ir con un trazo diferenciado, con el texto que indique la isoterma que se ha representado, así como el título de la gráfica y la etiqueta de los ejes.

Ejercicio 7. La razón de crecimiento de una levadura que produce un antibiótico es una función de la concentración del alimento c,

$$g = \frac{2c}{4 + 0.8c + c^2 + 0.2c^3},$$

el crecimiento parte de cero a muy bajas concentraciones debido a la limitación de la comida. También parte de cero en altas concentraciones debido a los efectos de toxicidad.

1. Grafique la función para el intervalo de concentraciones de alimento. Tenga presente que las concentraciones son **porcentuales**.

2. Estime el valor de c para el cual el valor de g es máximo, para ello puede dividir el intervalo [0,100] en $N \geq 1000$ partes iguales y determinar el valor de c que maximiza a g. Identifique el máximo obtenido en la curva mediante un punto con forma de diamante de color rojo, fondo de color *cyan* y línea de color *magenta* cuyo grosor es 2.

3. Encuentre de forma "numéricamente" precisa el valor de c para el cual el valor de g es el máximo. *Hint*: emplee la función `fminunc`. Compare los resultados de los puntos 2 y 3.

Ejercicio 8. A se convertirá en B en un reactor con agitación. El producto B y la sustancia sin reaccionar A se purifican en una unidad de separación. La sustancia A que no entró en la reacción se recicla al reactor. Un ingeniero de procesos ha encontrado que el costo inicial del sistema es una función de la conversión, x_A.

$$\text{Costo} = C\left[\left(\frac{1}{(1-x_A)^2}\right)^{0.6} + 6\left(\frac{1}{x_A}\right)^{0.6}\right].$$

Encuentre la conversión que dará el sistema de menor costo. C es una constante de proporcionalidad. *Hint*: emplee el procedimiento desarrollado en el Ejericio 7.

Ejercicio 9. Ecuación cartesiana de la catenaria*.

Un cable de una línea de transmisión de energía eléctrica, cuyos anclajes están a la misma altura tiene una cuerda de $L = 240$ [m]. El cable pesa $w = 83$ [N/m] y la flecha en su punto medio es de $y(0) = 60$ [m].

La ecuación cartesiana que describe la forma que adopta el cable se denomina "catenaria", se expresa de la siguiente forma:

$$y(x) = \frac{T_0}{w}\left(\cosh\left(\frac{wx}{T_0}\right) - 1\right),$$

donde x es la distancia en el eje horizontal, la cual se relaciona con la longitud de arco, s, mediante la expresión

$$s = \frac{T_0}{w}\sinh\frac{wx}{T_0},$$

siendo s medida desde el punto medio, $-L/2 \leq s \leq L/2$.

Se pide:

1. Determinar la tensión del cable en el punto medio, T_0. Para ello puede emplearse la ecuación de la curva catenaria, que representa la forma que adopta el cable bajo la acción exclusiva de su peso.

   Ayuda: emplee una secuencia de órdenes del tipo `T_o = fzero(fun,T_0)`, donde `T_0` es un valor semilla "cercano", empleado para resolver el problema nolineal de determinar el valor de `T_o`.

2. Realizar una gráfica en la que se muestre' la curva de la catenaria para el problema bajo estudio, determine rango de x, indique nombre de los ejes con unidades, características relevantes como el punto mínimo, etc.

*http://www.elrincondelingeniero.com/cables-catenaria-y-otros/

Ejercicio 10. En el Ejercicio 8 se utiliza sólo un reactor. Si se usan dos reactores en serie, cambia la ecuación que rige el costo del sistema, el cual se expresa como

$$\text{Costo} = C\left[\left(\frac{x_{A1}}{x_{A2}(1-x_{A1})^2}\right)^{0.6} + \left(\frac{1-\frac{x_{A1}}{x_{A2}}}{(1-x_{A2})^2}\right)^{0.6} + 5\left(\frac{1}{x_{A2}}\right)^{0.6}\right].$$

Encuentre las conversiones en ambos reactores (x_{A1} y x_{A2}), de forma que se minimicen los costos totales del sistema. C es una constante de proporcionalidad.

Ejercicio 11. Hay que separar una mezcla de benceno y tolueno en un reactor flash. ¿A qué temperatura deberá operarse el reactor para obtener la mayor pureza de tolueno en la fase líquida (maximizar x_T)? La presión en el reactor es de 800 mm Hg. Las unidades en la ecuación de Antoine son mm Hg y $°C$ para presión y temperatura, respectivamente.

$$\begin{aligned} P &= x_B P_{sat_B} + x_T P_{sat_T}, \\ \log_{10}(P_{sat_B}) &= 6.905 - \frac{1211}{T+221}, \\ \log_{10}(P_{sat_T}) &= 6.953 - \frac{1344}{T+219}. \end{aligned}$$

<u>Entrega obligatoria de 4 ejercicios</u>, se deben entregar los *scripts* empleados para resolver el 1, 3, 5 y otro a su elección.